<u>Chapitre</u> IV : Les *intérêts composés*

I. <u>Généralités et définition</u>

Avec les intérêts composés, nous abordons les mathématiques financières de moyen et long terme. Pour gérer les comptes de moyen et long terme c'est-à- dire les comptes bloqués, il est rare que les banques paient les intérêts à la fin de chaque année. Ainsi les intérêts obtenus par un capital C à la fin d'une année sont ajoutés à ce capital pour produire eux-mêmes des intérêts : on dit qu'on a capitalisé les intérêts.

La technique des intérêts composés consiste à capitaliser les intérêts de chaque période. En d'autres termes, un capital est placé à intérêt composé lorsqu'à la fin de chaque période, l'intérêt simple est systématiquement ajouté au capital initial et aux intérêts simples des périodes précédentes pour déterminer l'intérêt simple de la période suivante.

Soient :

- **un capital C_o**
- **i : un taux d'intérêt**
- **n : la durée de placement**

nous pouvons calculer l'intérêt obtenu par ce capital au bout d'un an (n =1).

- **Pour la 1ère période : $C_o \longrightarrow$ 1an**

Le calcul de l'intérêt donne :

$I = C_o i$

Ce qui donne à la fin de la 1ère année, un capital C_1

$C_1 = C_o + I$

$C_1 = C_o + C_o i$

$$\boxed{C_1 = C_o (1 + i)}$$

- **Pour la $2^{ème}$ période : $C_1 \longrightarrow$ 2an**

Le calcul de l'intérêt donne :

$I = C_1 i$

Ce qui donne à la fin de la $2^{ème}$ année, un capital C_2

$C_2 = C_1 + I$

$C_2 = C_1 + C_1 i$

$C_2 = C_1 (1 + i)$, avec $C_1 = C_o (1 + i)$ on a:

$C_2 = C_o (1 + i) * (1 + i)$

$$\boxed{C_2 = C_o (1 + i)^2}$$

- **A la fin de la période n : $C_n \longrightarrow$ nan**

$$\boxed{C_n = C_o (1 + i)^n}$$

On constate qu'avec les intérêts composés, le capital croît de façon exponentielle avec le temps et le taux d'intérêt

NB : A intérêt composé, les intérêts produits par un capital au cours des années 1 ; 2 ; … n après capitalisation des intérêts sont en progression géométrique de raison (1 + i).

A intérêt composé, les valeurs acquises successives constatées à la fin des années 1 ; 2 ; … n après capitalisation des intérêts sont en progression géométrique de raison (1 + i) et le 1^{er} terme de la suite est le capital initial C_o.

II. Valeur acquise et valeur actuelle

1) Valeur acquise

On appelle valeur acquise par un capital C placé à intérêt composé au taux i pendant n années, le total de ce capital et des intérêts composés générés.

Formule :

$$\boxed{C_n = C\,(1 + i)^n}$$

2) Valeur actuelle

On appelle valeur actuelle le capital C_o qu'il faut placer aujourd'hui au taux i pendant n années pour obtenir le capital C_n

$$C_o = \frac{C_n}{(1 + i)^n}$$

$$C_o = C_n\,(1 + i)^{-n}$$

Exemple

1. **Quel est l'intérêt produit par un capital de 10 000F placé au taux annuel de 5% pendant 5 ans ?**
2. **Quel capital doit – on placer dans les mêmes conditions si sa valeur acquise est de 20 000F dans 5 ans ?**

Solution

1. **I = valeur acquise – C**

   I = 2 762F

2. **C = 15 671F**

III. Cas particulier de calcul de la valeur acquise lorsque le nombre de période n n'est pas un entier

On peut envisager deux solutions possibles :

- **Une solution rationnelle**
- **Une solution commerciale**

<u>Illustration</u>

Un capital C = 18 700F est placé à intérêt composé au taux de 6%. Quelle est sa valeur acquise au bout de 4 ans 5 mois ?

$$C_{4\text{ ans }5\text{ mois}} = C_o\,(1 + i)^{n}$$

$$\text{Or } n = 4 + \frac{5}{12} = \frac{12}{53}\ \text{ans}$$

$$n = m + \frac{t}{T}$$

a) <u>Solution rationnelle</u>

Elle consiste à considérer que la valeur acquise au bout de 4 ans reste placée à intérêt simple pendant 5 mois avec

$$n = m + \frac{t}{T}$$

$$C_{m+\frac{t}{T}} = C\,(1 + i)^{m} + \left[C\,(1 + i)^{m} * i * \frac{t}{T} \right]$$

$$\boxed{C_{m+\frac{t}{T}} = C\,(1 + i)^{m}\,\left(1 + i\,\frac{t}{T}\right)}$$

Pour l'exemple précédent :

$$C_{4+\frac{5}{12}} = 18\,700\,(1 + 0{,}06)^{4}\,\left(1 + 0{,}06 * \frac{5}{12}\right)$$

$$= 24\,197F$$

b) Solution commerciale

Dans la pratique la solution rationnelle n'est pas employée. On lui préfère une solution commerciale dite solution approchée qui se fonde sur la formule générale des intérêts composés [$C_n = C\,(1+i)^n$] avec n comme nombre rationnel.

$$n = 4 \text{ ans} + \frac{5}{12} = \frac{12}{53} \text{ ans}$$

Pour l'exemple précédent :

$$C_{\frac{53}{12}} = C\,(1+i)^{\frac{53}{12}}$$

$$C_{\frac{53}{12}} = 18\,700\,(1{,}06)^{\frac{53}{12}}$$

$$=24\,189F$$

IV. Taux équivalent et taux proportionnel

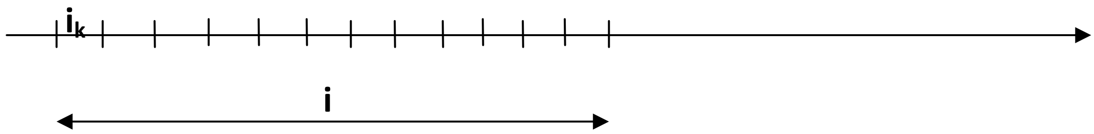
1) Taux équivalent proportionnel

Il est important de souligner que la notion de taux proportionnel se définit à partir du taux de la période de référence alors que la notion de taux équivalent repose sur la définition de la valeur acquise.

2) Taux équivalent

Deux taux définis pour des périodes de capitalisation différentes sont équivalents si deux capitaux égaux placés pendant le même temps mais en considérant des périodes de capitalisation correspondantes aux taux utilisés donnent les valeurs acquises égales.

Si on considère un taux i annuel et si on suppose que sur la période de placement on peut distinguer k sous périodes, on dira que le taux i_k est équivalent à i s'il permet d'obtenir à la fin de l'année la même valeur acquise que la valeur acquise avec le taux i.



on a : $(1 + i) = (1 + i_k)^k$

$$\underline{\boldsymbol{ik = \sqrt[k]{\overline{(1+i)}} - 1}}$$

- **Pour le semestre :**

$(1 + i) = (1 + i_s)^2$

$$i_s = \sqrt{1+i} - 1$$

- **Pour le trimestre :**

$(1 + i) = (1 + i_t)^4$

$$i_t = \sqrt[4]{1+i} - 1$$

- **Pour le mois :**

$(1 + i) = (1 + i_m)^{12}$

$$i_m = \sqrt[12]{1+i} - 1$$

<u>NB</u> :

Le taux équivalent i_k est inférieur au taux proportionnel $\frac{i}{k}$

A intérêt simple les taux équivalents sont égaux taux proportionnels.

V. Equivalence de capitaux à intérêt composé

Deux capitaux de valeur nominale et d'échéance différente sont équivalents à intérêt composé si à une date déterminée appelée date d'équivalence et escomptés à intérêt composé au même taux et dans les mêmes conditions ont à cette date même valeur actuelle.

Exemple

Soient un capital C_1 = 25 000F payable dans 3 ans et C_2 = 30 250F payable dans 5 ans.

Si le taux est de 10%, quelle est leur valeur actuelle à t = 0 choisi comme date d'équivalence.

Solution

A la date d'équivalence t = 0, $V_1 = V_2$

$V_1 = 25\,000*(1,1)^{-3}$

$= 18782,87$

$V_2 = 30\,250*(1,1)^{-5}$

$= 18782,87$

On peut changer la date d'équivalence, les valeurs actuelles restent les mêmes.

Prenons t = 1, $V_1 = V_2$

$V_1 = 25\,000*(1,1)^{-2}$

$= 20661,157$

$V_2 = 30\,250*(1,1)^{-4}$

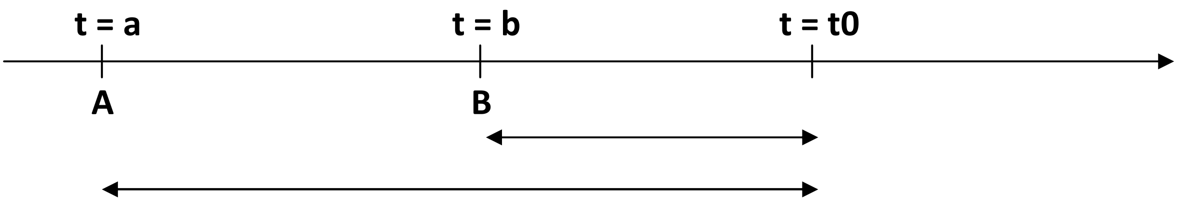
$= 20661,157$

Par extension, on peut dire que deux groupes de capitaux sont équivalents si la somme des valeurs actuelles des capitaux du 1er groupe est égale à la somme des valeurs actuelles des capitaux du second groupe.

Généralisation

Soit A un capital échéant à t = a et soit B un capital échéant à t = b et i le taux d'intérêt.

Si en $t = t_0 = 0$



Ce qui donne : $\boxed{A(1 + i)^{to-a} = B(1 + i)^{to-b}}$

On remarque immédiatement que cette relation est indépendante de t_o. On remarque également que contrairement au cadre de la théorie de l'intérêt simple, deux capitaux équivalents le sont pour toute valeur temporelle donc on peut écrire la relation :

$$\boxed{B = A\,(1+i)^{b-a}}$$

On constate que dans cette formule seule la différence des dates d'échéance intervienne. C'est pour cela qu'on dit que la notion d'intérêt à intérêt composé constitue la base même de tous les calculs d'actualisation.

Elle permet de remplacer à tout moment un ou plusieurs capitaux par un ou plusieurs capitaux équivalents. Il suffit que le créancier et le débiteur se mettent d'accord sur le taux.

VI. Notion d'échéance commune et d'échéance moyenne

La formule de l'équivalence des effets permet de trouver l'effet unique qui remplace un ou plusieurs effets d'échéance diverse à une date donnée d. cette date d est l'échéance commune. Mais si la valeur nominale de l'effet unique est égale à la somme des valeurs nominales des diverses effets remplacés, l'échéance commune est dans ce cas particulier appelée l'échéance moyenne.

Autrement dit, on appelle échéance moyenne de plusieurs effets, l'échéance commune de ces effets dans le cas où la valeur nominale de l'effet unique est égale à la somme des valeurs nominales des effets remplacés.

Exemple

Soit les 3 effets suivants :

- **4 000F échéant au 30 Avril**
- **6 000F échéant au 30 Mai**
- **10 000F échéant au 19 Juin**

Avec un taux de 6% et la date d'équivalence le 31 mars, on peut donc écrire ce qui suit :

Total des effets = 20 000F, $D = \frac{36\,000}{6} = 6\,000$

Pour trouver l'échéance moyenne n on a :

$$20\,000\,\frac{(6\,000 - n)}{6\,000} = 4\,000\,\frac{(6\,000 - 30)}{6\,000} + 6\,000\frac{(6\,000 - 60)}{6\,000} + 10\,000\frac{(6\,000 - 80)}{6\,000}$$

n = 64 jours d'où la date d'échéance moyenne est le 3 Juin. n représente le nombre de jours allant du 31 Mars à l'échéance traitée.

Remarque :

- **la date d'échéance moyenne est indépendante du taux d'escompte**
- **la date d'échéance moyenne ne dépend pas de la date d'équivalence**